

Forma algebrică a numerelor complexe

Forma algebrică a unui număr complex este:

$$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1.$$

Numărul real a se numește partea reală a numărului complex și se scrie $a = \operatorname{Re}(z)$.

Numărul real b se numește partea imaginară și se notează $b = \operatorname{Im}(z)$.

Numărul i se numește unitate imaginară.

Operații cu numere complexe

$$z = a + bi, z' = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Adunarea:

$$z + z' = (a + c) + (b + d)i$$

Scăderea:

$$z - z' = (a - c) + (b - d)i$$

Înmulțirea:

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Puterile numărului i

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i.$$

Conjugatul unui număr complex

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci conjugatul lui z este numărul:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Proprietăți ale numerelor complexe conjugate:

- a) $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
- b) $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.
- c) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- d) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$
- e) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- f) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- g) $\overline{\bar{z}} = z$.

Observație. Pentru a demonstra că un număr complex z este real, arătăm că numărul z este egal cu conjugatul său.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Raportul a două numere complexe

Pentru a calcula raportul a două numere complexe, se amplifică fracția cu conjugatul numitorului.

Modulul unui număr complex

Dacă $z = a+bi$ este un număr complex, atunci modulul lui z este numărul real pozitiv:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proprietăți ale modulului:

- a) $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
- b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- c) $|z| = |\bar{z}|$
- d) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- e) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- f) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$
- g) $|z^n| = |z|^n$
- h) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.