

Teorie- puterea unei matrice pătratică

Definiție. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Reguli de calcul

1. $A^k \cdot A^p = A^{k+p}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k, p \in \mathbb{N}$

2. $(A^k)^p = A^{kp}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k, p \in \mathbb{N}$.

3. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3'. Dacă $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3''. Dacă $n, p \geq 2$, $n, p \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$, $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^{p-k} B^k$.

(Formula binomului lui Newton pentru matrice)

4. Dacă $m, n, p \geq 2$, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$, $A^m B^p = B^p A^m$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$. (Relația lui Hamilton – Caylay)