

Sisteme omogene

Sistemele omogene sunt sisteme în care cele două polinoame conțin doar monoame de același grad. Sistemele omogene au forma generală:

$$(S): \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

Metoda de rezolvare a sistemelor omogene

CAZ 1. $d_1 \neq 0$ și $d_2 \neq 0$.

Se realizează o combinație a celor două ecuații astfel încât prin adunarea lor să obținem termenul liber egal cu zero.

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 & | \cdot \alpha \neq 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 & | \cdot \beta \neq 0 \end{cases}$$

Se adună cele două ecuații, iar ecuația astfel obținută devine a doua ecuație a sistemului. Prima ecuație se copiază. Obținem astfel un sistem echivalent cu sistemul (S), de forma:

$$(S'): \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0 \end{cases}$$

A doua ecuație devine;

$$a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0 \quad | :x^2 \quad (x \neq 0) \Rightarrow a_3 + b_3 \frac{y}{x} + c_3 \left(\frac{y}{x} \right)^2 = 0$$

$$\text{Not. } \frac{y}{x} = t \Rightarrow a_3 + b_3t + c_3t^2 = 0$$

Rezolvăm ecuația de gradul doi obținută.

- Dacă nu există soluții reale, atunci sistemul dat nu are soluție.
- Dacă avem soluții reale se revine la notația făcută.

$$a) \Delta > 0 \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2:$$

$$\frac{y}{x} = t_1 \Rightarrow y = t_1x \quad \text{și} \quad \frac{y}{x} = t_2 \Rightarrow y = t_2x$$

$$b) \Delta = 0 \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 = t_2 = t:$$

$$\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = tx$$

În ambele situații se continuă cu rezolvarea sistemelor de mai jos (sisteme formate dintr-o ecuație de gradul întâi și o ecuație de gradul doi):

$$a) \begin{cases} y = t_1 x \\ a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y = t_2 x \\ a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y = tx \\ a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \end{cases}$$

CAZ 2. $d_1 = 0$ sau $d_2 = 0$.

În acest caz obținem un sistem de forma (S') care se rezolvă după algoritmul prezentat mai sus.