Varianta 011

SUBIECTUL I

a) 1; b) $3\sqrt{3}$; c) $A(-2,1)$ d) $d(A,d_1)=\dfrac{|2\cdot 2-(-1)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$. e) $r=3$.

f) $x+2y-8=0$.

SUBIECTUL II

1.

a) 2^{10}; b) $C_{10}^{3}=120$. c) 2^9. d) $p=\dfrac{1}{5}=0,2$; e) $2+4+\ldots+20=\dfrac{2+20}{2}\cdot 10=110$.

2.

a) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$. c) $y=0$ asimptotă orizontală;

d) $0<f(x)\le 1$, revine la $0<1\le 1+x^2$, inegalitate care are loc pentru orice $x\in \mathbf{R}$;

e) $\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

b) Din $z_1+z_2=a+d$ rezultă $z_2=a+d-z_1$. Înlocuim în $z_1z_2=ad-bc$ şi obținem $z_1(a+d-z_1)=ad-bc \Leftrightarrow -z_1^2+(a+d)z_1=ad-bc$ egalitate care are loc deoarece z_1 este soluție a ecuației $X^2-(a+d)X+ad-bc=0$.

c) Ținând cont de rezultatele de la a) şi b) avem

$$(z_1+z_2)A-z_1z_2I_2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$$

$$=\begin{pmatrix} (a+d)a-(ad-bc) & b(a+d) \\ c(a+d) & (a+d)d-(ad-bc) \end{pmatrix}=A^2.$$

d) $z_1X+z_2Y=\dfrac{z_1}{z_1-z_2}(A-z_2I_2)+\dfrac{z_2}{z_2-z_1}(A-z_1I_2)=\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_2}A-\dfrac{z_1z_2-z_1z_2}{z_1-z_2}I_2=A$.

e) Avem $(z_1+z_2)A^{k+1}-z_1z_2A^k=A^k\left[(z_1+z_2)A-z_1z_2I_2\right]$ şi se foloseşte egalitatea de la c);

f) Se aplică principiul inducției complete şi se ține cont de faptul că $X^2=X$, $Y^2=Y$, $XY=YX=O_2$

g) Se consideră $a=2$, $b=1$, $c=-5$, $d=8$. Se obține $z_1=7$, $z_2=3$ şi $B^n=\frac{7^n}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 5\end{pmatrix}+\frac{3^n}{4}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{2}{(1+x)^2}$.

b) Cum $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) Inegalitatea devine $1-2\sqrt{x}+x\geq 0 \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x}\right)^2\geq 0$ şi are loc pentru orice $x\in(0,\infty)$.

d) Folosind c) avem $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

e) $a_1=2$, $a_2=f(a_1)=\frac{4}{3}$, $a_3=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{7}$, $a_4=f\left(\frac{8}{7}\right)=\frac{16}{15}$.

f) Avem $a_n>1$, $n\in\mathbf{N}^*$. Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{f(a_n)}{a_n}=\frac{2}{1+a_n}<1$, $n\in\mathbf{N}^*$ ceea ce arată că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

g) Se aplică principiul inducției matematice şi apoi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1$.