Varianta 022

SUBIECTUL I

a) $\overline{z} = -1+3i$; b) $AC = 2\sqrt{5}$; c) $BC^2 = AC^2 + AB^2$; d) 20; e) $m = \frac{4}{3}$ şi $n = -\frac{5}{3}$;

f) $R = \frac{BC}{2} = 5$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = \frac{2005}{4}$; b) 520; c) $\frac{2}{3}$; d) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = 1$; e) $x \in (-\infty, 5]$.

2.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2007}}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{1}{4\sqrt{14}}$.

c) $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 (x^2+2007)dx = \frac{6022}{3}$.

d) $f'(x)=0$ admite soluția $x=0$ şi $f'(x)<0$ pentru $x \in (-\infty,0)$ respectiv $f'(x)>0$ pentru $x\in(0,\infty)$ rezultă $x=0$ este punct de minim local pentru funcția f .

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2007} f(0)}{f(0)+n^{2007}} = \sqrt{2007}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=1\in\mathbf{Z}$ şi $b=0\in\mathbf{Z}$, avem $I_2 \in G$. Pentru $a=3\in\mathbf{Z}$ şi $b=4\in\mathbf{Z}$, avem $M\in G$.

b) calcul direct;

c) $\det(M) = 25$.

d) calcul direct;

e) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

f) Pentru orice matrice $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in G$ avem $\det(X(a,b))=a^2+b^2$. Pentru ca $\det(A)=25^7$ este necesar ca $a^2+b^2=25^7$. Se alege $a=25^3\cdot 3$ şi $b=25^3\cdot 4$, atunci $a^2+b^2=25^6\left(3^2+4^2\right)=25^7$.

g) $\det(A)\neq 7$, oricare ar fi $A\in G \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 7$ pentru orice $a,b\in \mathbf{Z}$;
$7=0+7=1+6=2+5=3+4$ şi în nici una din cele 4 sume ambii termeni ai sumei nu sunt pătrate perfecte, deci 7 nu poate fi scris ca suma de pătrate perfecte.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=1+e^x$, $x\in \mathbf{R}$.

b) Cum $f'(x)=1+e^x>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe **R**.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$.

d) $\int_0^1\left(x+e^x\right)dx=e-\dfrac{1}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

f) $f(x)\geq 2x+1$ revine la $e^x-x-1\geq 0$. Fie funcţia $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^x-x-1$.
Cum $g'(x)=e^x-1\geq 0$ oricare ar fi $x\in[0,1]$, avem că g este crescătoare pe $[0,1]$, deci $g(x)\geq g(0)=0$ oricare ar fi $x\in[0,1]$. Atunci $e^x\geq x+1$ oricare ar fi $x\in[0,1]$.

g) Din $f(x)\geq 2x+1$, $x\in[0,1]$ avem $\dfrac{1}{f(x)}\leq\dfrac{1}{2x+1}$, $x\in[0,1]$. Atunci

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1\frac{1}{e^x+x}dx\leq\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^1=\frac{\ln 3}{2}=\ln\sqrt{3}.$$