

Varianta 028

SUBIECTUL I

a) 4; b) $|BC| = \sqrt{34}$; c) 4; d) $m = -1$ și $n = 3$; e) $M(3, 2)$; f) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 2$; b) 210; c) 5 numere; d) $x \in \{\hat{2}, \hat{5}\}$; e) $x = 2$.

2.

a) $f'(x) = \frac{2008x^{2007}}{x^{2008} + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1004$.

c) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \ln 2$.

d) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc $1 < 1 + x^{2008}$. Cum funcția „logaritm natural” este crescătoare, rezultă $f(x) \geq \ln 1 = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci $a = 0$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(1)}{2n+3} = \frac{\ln 2}{2}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = 1$ și $b = 0$, rezultă $I_2 \in G$. Pentru $a = b = 0$, rezultă $O_2 \in G$.

b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(bc + ad) & ac - bd \end{pmatrix}$.

Deoarece $ac - bd \in \mathbf{Z}$ și $ad + bc \in \mathbf{Z}$, rezultă $A \cdot B \in G$.

c) calcul direct;

d) Orice matrice $A \in G \setminus \{O_2\}$ este inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & -\frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$. Atunci

$A^{-1} \in G$ dacă $\frac{a}{a^2 + b^2} \in \mathbf{Z}$ și $\frac{b}{a^2 + b^2} \in \mathbf{Z}$, deci $a^2 + b^2 = 1$. Aceasta arată că $A \in G_1$.

e) Dacă $G_k \neq \emptyset$, atunci există $A \in G$ cu $\det(A) = k$. Din b) și c) rezultă că $A^2 \in G$ și $\det(A^2) = k^2$, deci $A^2 \in G_{k^2}$ și astfel $G_{k^2} \neq \emptyset$;

f) Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in G_9$, deci $G_9 \neq \emptyset$;

g) Ecuația $a^2 + b^2 = 3$ nu are soluții în \mathbf{Z} , deci $G_3 = \emptyset$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1, x \in \mathbf{R};$

b) $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$;

c) $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și funcția f este descrescătoare pe \mathbf{R} ;

d) $F(x) = \int_0^x (\sqrt{t^2+1} - t) dx = \int_0^x \sqrt{t^2+1} dt - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = I_1 - \frac{x^2}{2}, x > 0$ și

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} - \ln|x + \sqrt{x^2+1}| \right);$$

e) $F'(x) = f(x)$ și $f(x) > 0$ pentru orice $x \geq 0$ rezultă F crescătoare pe $[0, \infty)$.

Atunci $F(x) \geq F(0) = 0$, oricare ar fi $x \geq 0$.

f) Calcul direct;

g) $x=0$ este soluție; pentru $x > 0, f(x) < f(0) = 1$ și $\log_2(2+x^2) > 1$, deci ecuația nu are soluție pentru orice $x > 0$.