Varianta 030

SUBIECTUL I

a) 1; b) $x = k$, k constantă reală; c) $x = sin\frac{\pi}{4} \in M$; d) 0; e) $|z| = 1$;

f) oricare două elemente din mulțimea $\left\{\sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi\right\}$.

SUBIECTUL II

1.

a) 2; b) $e = \frac{3}{4}$. c) $a = \frac{1}{2}$. d) $t \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$. e) $\log_2 8 = 3$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

b) 1;

c) Funcția f este continuă pe **R**. Avem $f'(x) > 0$ pentru $x < 0$ și $f'(x) < 0$ pentru $x > 0$, deci $x = 0$ este unicul punct de extrem (maxim).

d) $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$;

e) $1 + \frac{\pi}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(B) = 4$.

b) $r = 4$.

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

d) Se folosește principiul inducției matematice.

e) Avem $E + \det(E) \cdot E^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(E + \det(E) \cdot E^*) = 4$.

f) $s = -1$;

g) $u = v = 1$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$.

b) $x = 0$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției f .

c) $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \in (0,\infty)$, rezultă că g este concavă pe $(0,\infty)$.

d) $f(x) + g'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1 = p$ pentru orice $x \in (0,\infty)$.

e) Avem $h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$. Ecuația $h'(x) = 0$ are soluția $x = 1$ şi $h'(x) > 0$ pentru $x \in (0,1)$, $h'(x) < 0$ pentru $x \in (1,\infty)$. Rezultă că $x = 1$ este unicul punct de extrem al funcției h.

f) $x = 1$ este punct de maxim pentru funcția h atunci $h(x) \le h(1) = 0$ pentru orice $x \in (0,\infty)$. Această inegalitate implică $1 + x \cdot \ln x \ge x$ pentru orice $x \in (0,\infty)$.

g) Deoarece $h(x) \le 0$ pentru orice $x \in (0,\infty)$, rezultă $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$. Atunci

$$\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 \ln x\,dx \ge \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = 1 - \ln 2.$$