VARIANTA 45

SUBIECTUL I

a.) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

b.) Rezolvând sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y = 2 \\ sau \\ x = 2, y = 2 \end{cases}$ Obtin 2 puncte de intersectie

c.) $z = (2-i)(2+i) = 4 - i^2 = 5$; Real z = 5

d.) $\sin\pi + \sin(-\pi) = \sin\pi - \sin\pi = 0$

e.) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ a=2

f.) 2 +3i + i (a+bi) = 4i $\Leftrightarrow$ 2 -b+ i (3+a) = 0+4i $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

SUBIECTUL II

1.

a.)($f \circ$ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x)-2 = 3(x +1)-2 = 3 x +1($\forall$) $x \in R$. $(f \circ g)(2) = 7$

b.) $\frac{5!-3!}{4!} - \frac{3!(20-1)}{3!\cdot 4} = \frac{19}{4}$

c.) $\Delta_x = -4 \quad x_1 = -1 - i \quad x_2 = -1 + i$

d.) f(-2) = -8 -20 +4 = -24

e.) Deoarece numai 1 si 2 verifică, obțin probabilitatea $\frac{2}{5}$

2.

a.) $f' = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad (\forall) x \in R$

b.) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

c.) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 1$

d.) Evident $f'(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in (-1,1)$ $\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe[-1,1]

e.) $\lim_{x\to\infty} x\cdot f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$

SUBIECTUL III

a.) Evident

b.) Aleg $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \in M$ şi det A=0 şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B \in M$ şi det B=1$\neq 0$

c.) det A= 2≠0 $\Rightarrow$ $(\exists) A^{-1}$ şi ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,iar $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M$

d.) Fie $X \in M, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a,b,c,d \in \{0,1,2\}$ cu $a \neq 0$

det X = ad – bc; pentru a·d≤4 şi bc≥0 obţin det X ≤4 , apoi ad ≥0 şi bc≤4 obţin det X ≥ -4

e.) Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M$; a_{11} poate fi ales în două moduri, pentru fiecare mod elementele a_{12}, a_{21}, a_{22}, pot fi alese în câte 3 moduri independente unul de celelalte, deci vom avea 2-3³ matrice în M.

f.) Fie X matricea obţinută, efectuând produsul tuturor matricilor din M; obţin că X are 2 linii şi două coloane $\Rightarrow$ rang $X \in \{0,1,2\}$. Dar în acest produs, sunt şi matrici neinversabile cu determinantul nul, adică detX $=0 \Rightarrow rangX \in \{0,1\}$ .Deoarece fiecare element de pe locul 1,1 este nenul rezultă că a_{11} din X este nenul, deci rang X ≠0.

Concluzie: rang X =1.

g.)Pentru n=0 aleg $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi det X = 0; pentru n=1 aleg $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi det X = 1; pentru n = -1 aleg $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi det X = -1; analog pentru $\pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 4$.

SUBIECTUL IV

a.) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} (\forall) x \in R$

b.) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x) \ (\forall) x \in R$

c.)Evident $0 \leq f(x) \ (\forall) x \in R$ şi $\dfrac{1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ adica $f(x) \leq 1 \ (\forall) x \in R$

d.) $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ şi cum în jurul punctelor $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ şi -$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ f'' îşi schimbă semnul, acestea sunt punctele de inflexiune ale lui f.

e.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către +∞

f.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(arctg \quad t\right)\Big|_0^x = \lim\limits_{x\to\infty} arctg \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

g.)Fie g: R→R g(x) = $\dfrac{1}{10^{2008}\cdot\pi}\cdot f(x)$ evident g(x)>0, $(\forall)$ $x \in R$, g continuă pe R şi în plus g este pară

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\int_{-x}^x g(t)dt\right) = \frac{2}{10^{2008}\cdot\pi} = \lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{2}{10^{2008}\cdot\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\frac{1}{10^{2008}} < \frac{1}{10^{2007}}}$$