Varianta 046

SUBIECTUL I

a) $\bar{z} = -2007i$.

b) $AC = 8$, $AB = 10$, $BC = 6$, deci triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow$ aria este

$A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

c) Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A, deci $AC = 6$, $AB = 8$, $BC = 10$. Fie $AD \perp BC$. Atunci $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = 4{,}8$.

d) $|z| = \dfrac{|3+i|}{|3-i|} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$.

e) $\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{9\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4} = 0$.

f) Punctul $A(-1, 0)$ aparține hiperbolei, deci ecuația tangentei se obține prin dedublarea ecuației hiperbolei, adică $x_A x - \dfrac{y_A y}{2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

SUBIECTUL II

1)

a) $3^{x^2+x} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = -2$.

b) $C_5^2 = 10$.

c) $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18 = \log_2 \dfrac{3 \cdot 48}{18} = 3 \in \mathbf{N}$.

d) Aplicând teorema restului obținem $r = f(1) = 0$.

e) $-3 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = 2 \in \mathbf{N} \Rightarrow a_2 = -3$ este termen al şirului

$1 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = 4 \in \mathbf{N} \Rightarrow a_4 = 1$ este termen al şirului

$4 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = \dfrac{11}{2} \notin \mathbf{N} \Rightarrow 4$ nu este termen al şirului

$6 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = \dfrac{13}{2} \notin \mathbf{N} \Rightarrow 6$ nu este termen al şirului.

Deci probabilitatea este $\dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

2)

a) $f(-x) = (-x)^{2007} - x = -(x^{2007} + x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f'(x) = 2007x^{2006} + 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = 1$.

d) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ pentru că funcția este impară (s-a demonstrat la punctul a)).

SUBIECTUL III

a) $A(x) = A(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$, $x, y \in (0, \infty)$.

b) $\forall\, A(x), A(y) \in M$ avem $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy-1 & xy \end{pmatrix} = A(xy)$.

c) $A(x)A(y) = A(xy) = A(yx) = A(y)A(x)$, $\forall\, A(x), A(y) \in M$.

d) Datorită comutativității trebuie să rezolvăm doar ecuația $A(x)A(e) = A(x) \Leftrightarrow$ $A(xe) = A(x) \Leftrightarrow xe = x \Leftrightarrow x(e-1) = 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow e = 1 \in (0, \infty)$. Deci există matricea $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ care îndeplinește cerința problemei.

e) Datorită comutativității trebuie să rezolvăm doar ecuația $A(x)A(x') = A(1)$ $\Leftrightarrow A(xx') = A(1) \Leftrightarrow$ $xx' = 1 \Rightarrow \exists\, x' = \dfrac{1}{x} \in (0, \infty)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Deci $\forall\, A(x) \in M, \exists\, A(x') = A\left(\dfrac{1}{x}\right) \in M$ care îndeplinește cerința problemei.

f) Notăm propoziția cu $P(n)$. Verificăm pentru $n = 1 \Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$ ceea ce este adevărat . Presupunem că $P(k)$ adevărată, adică $A^k(x) = A(x^k)$ și demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Avem $A^{k+1}(x) = A^k(x)A(x) = A(x^k)A(x) = A(x^k x) = A(x^{k+1})$. Deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

g) Funcția este bijectivă prin construcție, pentru orice element $x \in (0, \infty)$ există o matrice unică $A(x) \in M$ astfel încât $f(A(x)) = x$.
$f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(xy)) = xy = f(A(x)) \cdot f(A(y))$, $\forall\, A(x), A(y) \in M$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0) = 0$ și $g(0) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$

$g'(x) = \dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2} = 2f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem soluțiile $x_1=-1$ şi $x_2=1$.

x	$-\infty$ -1 0 1 ∞
$f'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - -
$f(x)$	0 ↘ $f(-1)$ ↗ 0 ↗ $f(1)$ ↘

Din tabelul de variație se observă că $x=-1$ şi $x=1$ sunt puncte de extrem local pentru funcția f.

Rezolvând ecuația $g'(x)=0$ obținem $x=0$.

x	- ∞ 0 ∞
$g'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + +
$g(x)$	↘ $g(0)$ ↗

Din tabel se observă că $x=0$ este punct de extrem local al funcției g.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f.

e) Din c) şi d) şi din $f(0)=0$ se observă că $f((-\infty,0])=[-\frac{1}{2},0]$, deci $f(x)\le 0$, $\forall\, x\in(-\infty,0]$. Tot din punctual c) rezultă că funcția g este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi valoarea minimă este $g(0)=0$ care se atinge în $x=0$ $\Rightarrow g(x)\ge 0, \forall\, x\in(-\infty,0]$.

f) Din e) avem $f(x)\le 0\le g(x)$, $\forall\, x\in(-\infty,0] \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}\le \ln(1+x^2)$, $\forall\, x\in(-\infty,0]$.

g) Integrând inegalitatea demonstrată la punctul anterior, avem

$$\int_{-1}^{0}\ln(1+x^2)dx \ge \int_{-1}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln 2 .$$