Varianta 047

SUBIECTUL I

a) $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.

b) $AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 12 = 0$.

c) Fie M mijlocul segmentului $[AB] \Rightarrow M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = M(3, 2)$.

d) Dacă AO este diametrul cercului, atunci raza este $r = \frac{AO}{2} = 2$. Centrul cercului este punctul $C(0, 2)$, deci ecuația cercului este $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

e) Triunghiul fiind dreptunghic, centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, deci raza este $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{13}$.

f) Din triunghiul AOB dreptunghic în O avem $tg\left(O\hat{A}B\right) = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL II

1)

a) $\lg x = \lg 6 - \lg 2 \Leftrightarrow \lg x = \lg 3 \Leftrightarrow x = 3 \in (0, \infty)$.

b) Se pune condiția $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Aplicând formula $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ecuația devine $n^2 - n - 42 = 0$. Soluția naturală este $n = 7$.

c) Din definiția progresiei aritmetice avem $a_4 = a_3 + r$, de unde se obține $r = -6$.

d) Elementele inversabile ale inelului sunt -1 şi 1 , deci probabilitatea este $\frac{1}{3}$.

e) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(3) = 7$.

2)

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

d) $f''(x) = 6x - 6$. Din ecuația $f''(x) = 0$ obținem soluția $x = 1$. Facem tabelul de semn pentru $f''(x)$.

x	$-\infty$ 1 ∞
$f''(x)$	- - - - - - - - - 0 + + + + + + + +

$f(x)$	$\cap$ -2 $\cup$

Se observă că punctul (1, -2) este punct de inflexiune pentru graficul funcției f .

e) $\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + C$.

SUBIECTUL III

a) $(x-i)(y-i)+i = xy - ix - iy + i^2 + i = xy - i(x+y) - 1 + i = x * y$, $\forall x, y \in \mathbf{C}$.

b) Legea de compoziție este asociativă dacă are loc egalitatea $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in \mathbf{C}$. Folosind rezultatul de la primul punct, avem

$(x*y)*z = [(x-i)(y-i)+i]*z = (x-i)(y-i)(z-i)+i$ (1)

$x*(y*z) = x*[(y-i)(z-i)+i] = (x-i)(y-i)(z-i)+i$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in \mathbf{C}$, deci legea este asociativă.

c) Numărul complex $e=1+i$ este element neutru pentru legea de compoziție dacă $x*e = e*x = x$, $\forall x \in \mathbf{C}$ **.** Verificăm: $x*(1+i) = (x-i)(1+i-i)+i = x$ **,** $\forall x \in \mathbf{C}$**,** respectiv $(1+i)*x = (1+i-i)(x-i)+i = x$ **,** $\forall x \in \mathbf{C}$**.** Deci numărul complex $e=1+i$ este element neutru pentru legea de compoziție.

d) $\forall x, y \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$ avem $x \neq i$, $y \neq i \Rightarrow x - i \neq 0$, $y - i \neq 0 \Rightarrow (x-i)(y-i) \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-i)(y-i)+i \neq i$, deci $x*y \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$. Rezultă că mulțimea $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbf{C}$ în raport cu legea de compoziție.

e) Din punctele anterioare rezultă că $(\mathbf{C} \setminus \{i\}, *)$ este un monoid. Mai trebuie să demonstrăm că $\forall x \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$, $\exists x' \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$ astfel încât $x*x' = x'*x = e$. Se poate demonstra uşor că legea este comutativă şi deci trebuie să rezolvăm doar ecuația

$x*x' = e \Leftrightarrow (x-i)(x'-i)+i = 1+i \Leftrightarrow (x-i)(x'-i) = 1 \Rightarrow \exists\, x' = \frac{1}{x-i} + i$, $\forall x \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$.

Verificăm dacă $x' \in \mathbf{C} \setminus \{i\} \Leftrightarrow x' \neq i \Leftrightarrow \frac{1}{x-i} \neq 0$, adevărat pentru $\forall x \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$. Deci $(\mathbf{C} \setminus \{i\}, *)$ este grup.

f) Prin calcul direct, folosind rezultatul de la primul punct, se obține $i*i^2*i^3*i^4 = i$.

g) Se verifică uşor că $x_1 * x_2 * ... * x_{2007} = (x_1 - i)(x_2 - i)...(x_{2007} - i) + i$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0) = e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0 = 1$.

b) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = (e^x - e^{-x})(\sin x + \cos x), \forall x \in \mathbf{R}$.

c) $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 1$. Ecuația tangentei în punctul (0, 1) este :

$y - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 1$.

d) Rezolvăm ecuația $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x}=0$ cu soluția $x=0$ sau $\sin x+\cos x=0$ cu mulțimea de soluții $\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in \mathbf{Z}\right\}$. Se observă că $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{3\pi}{4}$ sunt rădăcini consecutive ale derivatei. Facem tabelul de variație pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{4}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	0 - - - - 0 + + + 0
$f(x)$	$\searrow$ 1 $\nearrow$

Pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ derivata este negativă, deci funcția este strict descrescătoare, iar pe $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ derivata este pozitivă, deci funcția este strict crescătoare.

e) Din tabelul de variație rezultă că $x=0$ este punct de minim local pentru funcția *f*.

f) $f(0)=1$ este minim pentru funcția *f* pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, deci $f(x)\geq f(0)=1$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. Atunci $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx \geq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1\cdot dx = x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\pi$.

g) Avem $a_n=e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}...+e^{-2n\pi}=\frac{e^{-2\pi}\left(1-e^{-2n\pi}\right)}{1-e^{-2\pi}}$, $n\geq 1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{e^{2\pi}-1}$.