VARIANTA 049

SUBIECTUL I

a) Se obține sistemul $\begin{cases} 5+a+b=0 \\ 1+5a+b=0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=4 \\ b=-9 \end{cases}$;

b) $AC=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$;

c) Dacă z=1+I atunci $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$;

d) $\sin\pi+tg\dfrac{\pi}{4}=1$;

e) Aria [ABC]=$\dfrac{|\Delta|}{2}$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-9+16=7$, deci aria [ABC]=$\dfrac{7}{2}$;

f) Se ştie că $i^n=\begin{cases} 1 & ,n=4k \\ i & ,n=4k+1 \\ -1 & ,n=4k+2 \\ -i & ,n=4k+3 \end{cases}$, deci $1+i+i^2+\ldots+i^{11}=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+(i^8+i^9+i^{10}+i^{11})=$

$=0+0+0=0$

SUBIECT II

1.

a) $Z_{14}=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{13}\right\}$ deci suma cerută este $\sum_{k=0}^{13}\hat{k}=\hat{7}+\sum_{k=1}^{6}\left(\hat{7}+\hat{0}\right)=\hat{7}$;

b) Fie $X\leq\{1,2,3,4,5,6\}$ astfel încât $X\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2\}$; atunci $\{3,4\}\not\in X$, iar $\{1,2\}\in X$ deci $X=\{1,2\}$ sau $X=\{1,2,5\}$ sau $X=\{1,2,6\}$ sau $X=\{1,2,5,6\}$

c) Numărul de funcții este $2^2=4$;

d) Notez $f=x^3+6x^2+11x+6\in Z[X]$; dacă $\alpha\in Q$, $\alpha=\dfrac{m}{n}, m,n\in Z$, $(m,n)=1$, $n\neq 1$ este rădăcină a lui f atunci n divide 1 şi m divide 6 adică $\alpha\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$; evident $\alpha>0$ nu convine, iar dintre valorile negative $f(-1)=0$, $f(-2)=0$, $f(-3)=0$. Concluzie solutiile raționale ale ecuației sunt -1, -2, -3.

e) $n^2+5n-6\geq 0 \Leftrightarrow (n-1)(n+6)\geq 0$ şi cum $n>0$ obțin $n\geq 1$, adică toate numerele din {1, 2, 3, 4, 5} verifică inegalitatea; deci prov\babilitatea cerută este 1

2.

a) $f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3), \forall x\in R$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^5-5x^3)dx=\left(\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{5x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{13}{12}$;

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=-\sqrt{3}$ sau $x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Din table se vede că f are două puncte de extreme local $x_1=-\sqrt{3}$ şi $x_2=\sqrt{3}$;

d) $f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Din table se vede că *f* are trei puncte de inflexiune $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+4}{5\sqrt{n}+6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left[3+\frac{4}{\sqrt{n}}\right]}{\sqrt{n}\left[5+\frac{6}{\sqrt{n}}\right]} = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL III

a) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}, a_{ij} \in \{\pm 1\} \Rightarrow -A = (-a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}} \in M$ căci $-a_{ij} \in \{\pm 1\}$;

b) Fie $A \in M$; deoarece *A* are 9 elemente impare şi fiecare poate fi ales în două moduri, rezultă că în *M* sunt 2^9 matrice;

c) Fie $A \in M$; adunând linia 1 la liniile 2 şi 3, acestea vor avea elemente din mulțimea {0, 2, -2}. În det*A* scoatem factor comun 2 de pe linia 2 si linia 3 şi det*A* se divide cu 4 (căci determinantul rămas are numai elemente întregi, deci este întreg);

d) Fie $A \in M$; cum det*A* este o sumă de șase termini fiecare din mulțimea {-1, 1}, atunci $-6 \le \det A \le 6$. Dar la c) am demonstrat că 4 divide det*A*. Deci detA $\in \{-4, 0, 4\}$;

e) Fie $B \in M$ inversabilă; presupun că $B^{-1} \in M$ adică elementele sale sunt 1 sau -1. Deorece elementele matricei B sunt, de asemenea 1 sau -1 ar rezulta că $B \cdot B^{-1}$ are toate elementele impare (ca sumă de trei impare) ceea ce este fals căci $B \cdot B^{-1} = I_3$ şi I_3 *are ca element pe 0;*

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M$ şi $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$

g) Fie $A \in M$, arbitrară; atunci A^2 are numai elemente impare şi prin inducție A^{2007} va avea numai elemente impare, adică toate elementele lui A^{2007} sunt nenule.

SUBIECTUL IV

a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x dt = t\Big|_0^x = x, (\forall)x \in R$;

b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}, (\forall)x \in R$

c) Ecuația $f_1(x) + f_2(x) = 0$ devine: $\frac{x^2}{2} + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau x=-2

d) Voi arăta prin inducție că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, (\forall)x \in R, (\forall)n \in N$

Pentru n=0 $f_0(x)=\frac{x^0}{0!}=1$, da.

Presupun că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ şi am f $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x \frac{t^n}{n!}dt=\left.\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$;

Conform principiului inducției matematice $f_n(x)=\frac{x^n}{n!},(\forall)x\in R,(\forall)n\in N$;

e) $f_n(1)=\frac{1}{n!}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

f) $f'_{n+1}(x)=\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)'=\frac{(n+1)x^n}{n!(n+1)}=\frac{x^n}{n!}=f_n(x),(\forall)x\in R,(\forall)n\in N$

g) $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0\Leftrightarrow x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}=0\Leftrightarrow x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)=0$

Notez $h(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}, h:R\to R$

$h'(x)=\frac{x^2}{8}+\frac{x}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{24}(3x^2+8x+12)$ $\Delta_x=64-144<0\Rightarrow h'(x)>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
h'(x)	+	+
h(x)	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Ținând cont de table şi de faptul că *h* este continuă, rezultă că există şi este unic $c\in R$ cu $h(c)=0$ adică ecuația $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$ are două soluții reale: $x_1=0$; $x_2=c$ şi două soluții complexe nereale.