Varianta 054

Subiectul I

a) $|\cos 1 + i\sin 1| = \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = 1$

b) $DC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) Rezolvând sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ obțin soluțiile $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} sau \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

d) Deorece $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că punctele sunt coliniare

e) Distanța cerută este $\frac{|4+3-3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

f) $(\sqrt{3}+i)^4 = a + bi \Leftrightarrow (3 - 1 + 2i\sqrt{3})^2 = a + bi \Leftrightarrow (2 + 2i\sqrt{2})^2 = a + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 12 + 8i\sqrt{3} = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 8\sqrt{3} \end{cases}$

Subiectul II

1.

a) Ridicând la pătrat și desființând parantezele se obține egalitatea

b) Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$, folosind a) obțin că $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0, y - z = 0, z - x = 0$ adică $x=y=z$

c) Notând $2^x = a, 3^x = b, 5^x = c$ obțin $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ și aplicând b) rezultă $a=b=c$ adică $x=0$

d) $Z_6 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$ și cum toate verifică $\hat{x}^3 = \hat{x}$ rezultă că probabilitatea cerută este 1

e) Suma cerută este -1

2.

a) $f'(x) = \sin x + x\cos x, \forall x \in R$

b) $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \sin 1$

c) Deoarece $[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x \geq 0, \cos x > 0, \forall x \in (0,1] \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (0,1]$

deci f este strict crescătoare pe (0,1]

d) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Subiectul III

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + dh \end{pmatrix}$

b) Folosind a) am *ae+bg+cf+dh=ea+fc+gb+dh*

c) $A+B=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; A-B=\begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$

d) det(A+B)+det(A-B)=(a+e)(d+h)-(b+f)(c+g)+(a-e)(d-h)-(b-f)(c-g)=
=ad+ah+de+eh-bc-bg-cf-fg+ad-ah-de+he-bc+bg+cf-fg=2(ad-bc)+2(eh-fg)=
=2(detA+detB)

e) detA · detB=(ad-bc)(eh-fg)=adeh-adfg-bceh+bcfg
det(AB)=(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)=aecf+aedh+bgcf+bgdh-afce-afdg-bhce-bhdg
=adeh-adfg-bceh+bcfg
de unde det(AB)=(detA)(detB)

f) Pentru n=2 aplicăm e);
Presupun că det(A_1...A_n)=(detA_1)(detA_2)...(detA_n) și am det(A_1A_2...A_nA_{n+1})=
det((A_1A_2...A_n)·A_{n+1})=det(A_1A_2...A_n)·detA_{n+1}=(detA_1)(detA_2)...(detA_n)(detA_{n+1})
Conform principiului inducției matematice propoziția este adevărată pentru orice $n\in N, n\geq 2$

g) Luând în f) $A_1=A_2=...=A_n=A$ obțin detA^n=(detA)^n

Subiectul IV

a) *f(1)*=7

b) $(x-1)f(x)=(x-1)(x^6+x^5+...+x+1)=x^7-1, \forall x\in R$

c) *f(1)*=7>0 și pentru $\forall x\neq 1$ am $f(x)=\dfrac{x^7-1}{x-1}>0$

Deci $f(x)>0, \forall x\in R$

d) $\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x)\Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in R$

e) $F'(x)=f(x), \forall x\in R$ și $f(x)>0\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe R

f) Deorece F este strict crescătoare pe $R\Rightarrow F$ este injectivă deci ecuația $F(x)=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{7}$ are cel mult o soluție si cum x=1 convine, aceasta este unica soluție

g) Notez $u(x)=F(x)-xf(x), \forall x>0\Rightarrow u'(x)=F'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)=$
$-x(1+2x+...+6x^5)<0, \forall x>0\Rightarrow$ u este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$ cum u(0)=0$\Rightarrow u(x)<0, \forall x>0$ adică $F(x)\leq xf(x), \forall x>0$