Varianta 058

SUBIECTUL I

a) -2. b) $AC=\sqrt{2}$. c) triunghiul este dreptunghic în A. d) Aria este 4.

e) $m=-\frac{5}{3}, n=\frac{14}{3}$. f) $\cos\hat{B}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{34}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=446$. b) Al 10-lea termen al progresiei este 39. c) 4 numere: 120, 520, 512, 152. d) $f(f(1))=1$. e) $x\in(-\infty,10]$.

2.

a) $f'(x)=2x$. b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=6$. c) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{22}{3}$.

d) $x=0$ punct de extrem local. e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7\cdot 7}{16-n^7}=-7$.

SUBIECTUL III

a) $(x+3)(y+3)-3=xy+3x+3y+9-3=xy+3x+3y+6=x\circ y$.

b) $e=-2$. c) Prin calcul direct se demonstrează asociativitatea.

d) Ecuația devine $\left(3^x+3\right)^2=16$ şi admite doar soluția $x=0$.

e) $x\circ(-3)=(x+3)(-3+3)-3=-3\Rightarrow(-3)\circ y=-3, \forall x,y\in\mathbf{R}$.

f) Trebuie să demonstrăm că există $x,y\in$ **R-Q** astfel încât $x\circ y\notin$ **R-Q.** Fie $x=\sqrt{3}$ şi $y=-\sqrt{3}$, atunci $x\circ y=9-3-3=3\notin$ **R-Q**. (se mai poate face alegerea $x=\sqrt{3}+3$ şi $y=\sqrt{3}-9$).

g) Conform punctului e) rezultatul calculului este -3.

SUBIECTUL IV

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, deci ecuația cerută este $y=1$.

b) $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}, \forall x\in\mathbf{R}$. Finalizarea vă aparține !

c) $f'(x)<0, \forall x\in\mathbf{R}$, de unde concluzia e imediată .

d) $x=0$ este punct de maxim global pentru f, deci $f(x)\le f(0)=2, \forall x\in\mathbf{R}$, iar cealaltă inegalitate e echivalentă cu $x^2+1\le x^2+2$ care e evident adevărată $\forall x\in\mathbf{R}$ (e chiar strictă !) Desigur, şi inegalitatea din dreapta se poate demonstra elementar.

e) de exemplu, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{4}{3} \in \mathbf{Q}$.

f) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1+\frac{1}{x^2+1})dx = 1+\frac{\pi}{4}$

g) Folosim **d)** şi deducem $e^x \le e^x \cdot f(x) \le 2 \cdot e^x$. Integrăm aceste inegalități pe intervalul $[0,1]$, calculăm şi ajungem imediat la concluzia dorită.