Varianta 060

SUBIECTUL I

a) 3. b) $\sqrt{2}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. d) Simetricul puctului A este $B(-2,2)$. e) $\frac{3}{2}$.

f) $x+2y-4=0$ este ecuația căutată.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{x}=\hat{2}$. b) $f(g(3))=f(1)=1$. c) $x\in\{-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. d) $x=1$. e) $P=\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x)=e^x+1$. b) $e+\frac{1}{2}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$.

d) $f''(x)=e^x>0$, pentru orice număr real, deci funcția este convexă. e) 4.

SUBIECTUL III

a) pentru $a=1, b=0 \Rightarrow I_2\in G$.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & 0\\ b' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa' & 0\\ ba'+b' & 1\end{pmatrix}\in G$. c) $\det A=a\neq 0$.

d) există matricea $D=C^{-1}$, unde C^{-1} este inversa matricei C .

e) Matricele $S=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} 3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ verifică $S\cdot T\neq T\cdot S$.

f) Se demonstrează prin inducție matematică, că

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0\\ b\cdot\left(1+a+a^2+...+a^{n-1}\right) & 1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbf{N}^*,$$

prin urmare $\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}^{2007}=\begin{pmatrix} a^{2007} & 0\\ b\cdot\left(1+a+...+a^{2006}\right) & 1\end{pmatrix}$.

g) Fie $X=\begin{pmatrix} x & 0\\ y & 1\end{pmatrix}$. Ecuația $X^n=A$, folosind punctul f), devine

$$\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ y\cdot\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}\right) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow x^n=a, y=\frac{b}{1+x+\ldots+x^{n-1}},$$ adică $x=\sqrt[n]{a}, y=\frac{b}{1+\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a^2}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-1}}}$.

SUBIECTUL IV

a) $f(-1)=9, g(-1)=0$.

b) Prin calcul direct se arată egalitatea cerută.

c) Dacă $x<-1\Rightarrow x^9<-1\Leftrightarrow x^9+1<0$, deci $g(x)<0$, iar dacă $x>-1\Rightarrow x^9>-1\Leftrightarrow x^9+1>0$, adică $g(x)>0$.

d) Din b) avem $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x+1}, x\neq -1\\ 9, x=-1\end{cases}$.

Din c) se obține că $\frac{g(x)}{x+1}>0, \forall x\in \mathbf{R}\text{-}\{-1\}$. Cum $f(-1)=9$, obținem că $f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$.

e) Funcția F este derivabilă pe **R** şi prin derivare obținem $F'(x)=f(x)$. Deci F este o primitivă a funcției f pe **R**.

f) Avem $F'(x)=f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$ (vezi d)), deci funcția F este strict crescătoare pe **R**.

g) Din punctul anterior deducem că F este injectivă. Cum $\lim\limits_{x\to\mp\infty}F(x)=\mp\infty$ şi F este continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow F$ este surjectivă. În concluzie, F este bijectivă.