Varianta 061

SUBIECTUL I

a) $a = 1, b = -1$. b) $m_{AB} = 1 \Rightarrow x - y + 4 = 0$ este ecuația dreptei cerute.

c) $\left(\frac{0-4}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (-2,2)$. d) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$. e) $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. f) 10.

SUBIECTUL II

1.

a) $n \in \{1,2,3,4,5\}$. b) $\det A = 1$. c) $\operatorname{rang} B = 1 \Leftrightarrow \det B = 6 - m = 0 \Rightarrow m = 6$.

d) Inecuația se mai scrie $p < 3^2 \Rightarrow p = 8$. e) $\frac{27}{28}$.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$. b) $\frac{3}{4}$. c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,$ avem două puncte de extrem local.

d) Ecuația are trei rădăcini reale. e) 8.

SUBIECTUL III

a) $\bar{y}_1 = 1 + i, \bar{y}_2 = 1$. b) $(1-i) \circ (1-i) = \frac{1+i}{1-i} = i \Leftrightarrow i = m + n \cdot i \Rightarrow m = 0, n = 1$.

c) u=1.

d) Dacă ar exista $v \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ v = x, \forall x \in \mathbf{C}$ atunci $\frac{\bar{x}}{v} = x \Rightarrow v = \frac{\bar{x}}{x}$ care depinde de x, iar pentru $x = 0$ nici nu există. Contradicție.

e) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$.

f) Ecuația $z^3 = 1$ are soluțiile $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ şi $z_3 = \bar{z}_2$. Notând $z_2 = w$, avem A=$\{1, w, \bar{w}\}$.

g) $x, y \in A$, $x \circ y = \frac{\bar{x}}{y} \neq 0, \forall x, y \in \mathbf{C}^*$, deci $x \circ y \in A$ (sau se poate face tabla operației).

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot (x^2+1)}$, $g'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$. b) $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} > \frac{x}{x^2+1}, \forall x \geq 1$.

c) Derivata întâi este negativă pe $\mathbf{R}$, deci f este strict descrescătoare pe $[1,+\infty)$. Avem $g''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in [1,+\infty)$, deci g este convexă pe intervalul cerut.

d) $g''(x) > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow g'$ este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $g'(x) \geq g'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} > 0,$ $\forall x \geq 1$. Atunci g este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$. e) 1.

f) $= \frac{\pi+2}{4}$ (s-a folosit formula de integrare prin părți).

g) $g'(1) < g'\left(\sqrt{2007}\right) < f\left(\sqrt{2007}\right) < f(1)$, deci $\frac{\pi+2}{4} < \frac{\sqrt{2007}}{2008} + \operatorname{arctg}\sqrt{2007} < \frac{\pi+4}{4}$, de unde rezultă ceea ce trebuia demonstrat.