Varianta 068

SUBIECTUL I

a) $A_2(2,0)$, $B_2(0,2) \Rightarrow \ A_2B_2 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

b) $A_1(1,0)$, $B_3(0,3)$. Ecuația dreptei $A_1B_3 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$.

c) *Soluția* 1. Panta dreptei A_1B_3 este $m = -3$, deci panta paralelei prin $B_1(0,1)$ la dreapta A_1B_3 este tot $m = -3$. Ecuația dreptei determinată de punctul $B_1(0,1)$ și panta $m = -3$ este $y - 1 = -3(x - 0) \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$.

Soluția 2. O dreaptă paralelă cu dreapta A_1B_3 are ecuația $3x + y - a = 0$. Condiția ca punctul $B_1(0,1)$ să aparțină acestei drepte implică $a = 1$. Deci ecuația dreptei este $3x + y - 1 = 0$.

d) Avem punctele $A_1(1,0)$, $A_4(4,0)$, $B_4(0,4)$. Aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12$. Deci aria este $A = 6$.

e) Triunghiul A_2OB_2 este dreptunghic isoscel. Atunci $\sin(A_1\hat{A}_2B_2) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) Sunt 16 drepte A_nB_k, unde $n, k \in \{1,2,3,4\}$, iar împreună cu dreptele A_1A_2 și B_1B_2 sunt în total 18 drepte.

SUBIECTUL II

1)

a) Avem $4 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a + b = 8$.

b) $\frac{(c+4)!}{(c+3)!} = 5 \Leftrightarrow c + 4 = 5 \Leftrightarrow c = 1$.

c) $\hat{3}$ este element inversabil în $\mathbf{Z}_5$, deci ecuația are soluție unică $x = \hat{3}$.

d) $f(3)$ impar implică $f(3) \in \{3,5\}$ și $f(4), f(5) \in \{3,4,5\}$. Pentru cazul $f(3)$ =3 avem $3 \cdot 3 = 9$ funcții, iar pentru cazul $f(3)$ =5 avem încă 9 funcții. În total sunt 18 funcții pentru care $f(3)$ este impar.

e) $C_8^5 = 56$ de moduri.

2) a) $f'(x)=-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}-\frac{5}{x^6},\ x>0$.

b) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2-x+1}{x^5}=+\infty$ şi f este continuă pe $(0,\infty)$, rezultă că $x=0$ este unica asimptotă verticală la graficul funcției *f*.

c) Cum $f'(x)=\frac{-3x^2+4x-5}{x^6}<0, \forall x\in(0,\infty)$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

d) Deoarece $0<\sqrt{3}<\sqrt{5}$ şi funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă că $f\left(\sqrt{3}\right)>f\left(\sqrt{5}\right)$. Deci a este numărul mai mare.

e) $\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\left.\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}\right)\right|_1^2=\frac{61}{192}$.

SUBIECTUL III

a) $f(1)=1+a+b+c=1-1=0$.

b) *Soluția* 1. Dacă $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ sunt rădăcinile polinomului f, atunci $\begin{cases} f(1)=0\\ f(2)=0\\ f(3)=0\end{cases}$ Se obține sistemul $\begin{cases} a+b+c=-1\\ 4a+2b+c=-8\\ 9a+3b+c=-27\end{cases}$ care are soluția $\begin{cases} a=-6\\ b=11\\ c=-6\end{cases}$.

Soluția 2. Dacă $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ sunt rădăcinile polinomului f, folosind relațiile lui Viete avem $a=-\left(x_1+x_2+x_3\right)=-6$, $b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=11$ şi $c=-x_1x_2x_3=-6$.

c) Scriem primele două relații ale lui Viete pentru polinomul *f*, adică $S_1=x_1+x_2+x_3=-a$ şi $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=S_1^2-2S_2=a^2-2b\Rightarrow a^2-2b=b\Rightarrow a^2=3b$.

d) Cum x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului *f*, ele verifică ecuația ataşată polinomului, deci

$$x_1^3+ax_1^2+bx_1+c=0$$
$$x_2^3+ax_2^2+bx_2+c=0$$
$$x_3^3+ax_3^2+bx_3+c=0$$

Adunând cele trei relații obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3+ab-ab+3c=0\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3c$.

e) Polinomul este $f=X^3+X^2-3X+1$. Se observă că $x_1=1$ este soluție pentru polinomul *f*. Utilizând schema lui Horner avem:

	X^3	X^2	X	X^0
	1	1	-3	1
1	1	2	-1	0

Celelalte două rădăcini le aflăm rezolvând ecuația $x^2+2x-1=0$ şi obținem $x_2=-1+\sqrt{2}$, respectiv $x_3=-1-\sqrt{2}$.

f) Avem $A=f(-1)+f(1)=(-1+a-b+c)+(1+a+b+c)=2(a+c)$**,** deci A este un număr par.

g) $f(-1)+f(1)+f(-i)+f(i)=2(a+c)+(i-a-bi+c)+(-i-a+bi+c)\Rightarrow$

$4c=2007\Rightarrow c=\dfrac{2007}{4}\notin \mathbf{Z}$. Deci nu există $c\in \mathbf{Z}$ care să îndeplinească cerința problemei.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$.

b) Rezolvăm ecuația $f'(x)=0$ şi obținem singura soluție $x=1\in(0,\infty)$.

x	0 1 ∞
$f'(x)$	- - - - - 0 + + + + +
$f(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$

Din tabel deducem că $x=1$ este punct de minim local pentru funcția f.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, graficul funcției f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=mx+n$, unde

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}=1$, iar $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=0$. Deci dreapta $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

d) Avem $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$. Atunci

$$f'(2)f'(3)...f'(n)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

e) $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, $x\in(0,\infty)$.

f) Rezolvăm ecuația $g'(x)=0$ şi aflăm soluția $x=1\in(0,\infty)$.

x	$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$
$g'(x)$	$+ + + + 0 - - - - - - -$
$g(x)$	$\nearrow \quad 0 \quad \searrow$

Din tabel avem că $g(1)=0$ este valoarea maximă a funcției g, deci
$g(x)\le 0, \forall\ x\in(0,\infty) \Leftrightarrow 1+\ln x - x\le 0, \forall\ x\in(0,\infty) \Leftrightarrow 1+\ln x\le x, \forall\ x\in(0,\infty)$.

g) Cum $\cos x\ge 0, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 1+\cos x>0, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Conform punctului anterior, avem că $\ln(1+\cos x)\le \cos x, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Atunci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.