Varianta 071

SUBIECTUL I

a) Înlocuind în formula $V = A_b \cdot h = a^2 \cdot h$ obținem $V = 36$.

b) Triunghiul este dreptunghic, deci aria este $A = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 3$.

c) $\mathrm{tg}1 \cdot \mathrm{ctg}1 = 1 > 0$.

d) Centrul de greutate este $G\left(\dfrac{2-2-3}{3}, \dfrac{3+5-2}{3}\right) = G(-1, 2)$.

e) $\sin\dfrac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

f) Din condiția de paralelism se obține panta $m = 2$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta $m = 2$ este $y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

SUBIECTUL II

1)

a) Numerele -1 și 1 sunt rădăcini, deci probabilitatea este $\dfrac{2}{3}$.

b) Avem $f = (X-1)^2(X+1)$, deci polinomul este divizibil cu $X + 1$. Atunci câtul este $C(X) = (X-1)^2$, iar restul este $r(X) = 0$.

c) Aplicând relațiile lui Viete avem $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

d) Aplicând relațiile lui Viete avem $x_1x_2x_3 = -1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3} = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3} = -1$.

e) Deoarece $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$, avem că $\log_3 x \in \{-1, 1\}$, deci $x \in \left\{\dfrac{1}{3}, 3\right\}$.

2)

a) $f'(x) = 2006^x \ln 2006 + 2x$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \ln 2006$.

c) Cum $f'(x) > 0, \forall\, x > 0 \Rightarrow$ funcția *f* este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $f''(x) = 2006^x \ln^2 2006 + 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci funcția este convexă pe $\mathbf{R}$.

e) Deoarece $f(x) > 0$ pentru orice $x \in$ **R,** atunci aria este

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{2006^x}{\ln 2006} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2005}{\ln 2006} + \frac{1}{3}.$$

SUBIECTUL III

a) Alegem $x = 0 \in (-1, \infty) \Rightarrow A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in M$.

b) $A(2) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(2) = 3$.

c) $\det A(x) = \begin{vmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{vmatrix} = (1+2x)(1-x) + 2x^2 = x+1 > 0$ pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

d) Din $x > -1,\ y > -1 \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0 \Leftrightarrow xy + x + y > -1$, deci $xy + x + y \in (-1, \infty)$.

e) Pentru $A(x) \cdot A(y) \in M$ avem

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2y & -2y \\ y & 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2x)(1+2y) - 2xy & -2y(1+2x) - 2x(1-y) \\ x(1+2y) + y(1-x) & -2xy + (1-x)(1-y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2(xy+x+y) & -2(xy+x+y) \\ xy+x+y & 1-(xy+x+y) \end{pmatrix} = A(xy+x+y) \in M ,$$

pentru că $xy + x + y \in (-1, \infty)$ pentru orice $x, y \in (-1, \infty)$, folosind d).

f) Utilizând e), deducem că $A(x') \cdot A(x) = A(x) \cdot A(x') = A(xx' + x + x') \overset{a)}{=} A(0)$, dacă alegem $xx' + x + x' = 0$, adică $x' = \frac{-x}{x+1} \in (-1, \infty)$. Aşadar $A\left(\frac{-x}{x+1}\right) \in M$ convine.

g) Din e) rezultă partea stabilă şi comutativitatea. Asociativitatea rezultă din faptul că $M \subset M_2(\mathbf{R})$ şi înmulțirea este asociativă pe $M_2(\mathbf{R})$. Elementul neutru este $I_2 = A(0) \in M$ şi din f) avem că toate elementele mulțimii M sunt inversabile. Aşadar $(M, \cdot)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x + 2}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$, $x > 0$.

b) $g'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$, $x > 0$.

c) $f(1) = 0$, $g(1) = 0$ şi $g'(1) = 0$.

d) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e) Conform punctului b) avem $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty)$, deci funcția g este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

f) Deoarece funcția g este strict descrescătoare pe $[1, \infty) \Rightarrow g(x) \leq g(1)$ pentru orice $x \in [1, \infty)$, adică $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty) \Rightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x$ pentru orice $x \in [1, \infty)$.

g) Din punctul anterior avem că $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty) \Rightarrow \int_1^2 g(x)dx \leq 0$.