Varianta 072

SUBIECTUL I

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3-2=1$.

b) $\sin^2\frac{\pi}{2007}+\cos^2\frac{\pi}{2007}=1$.

c) $\bar{z}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i$.

d) Triunghiul este dreptunghic în A, deci raza cercului circumscris este $R=\frac{BC}{2}=5$.

e) $A=\frac{1}{2}|\Delta|\Rightarrow\Delta=\pm10$. Avem $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 5 & \alpha & 1\end{vmatrix}=7-\alpha$. Deci $7-\alpha=\pm10\Rightarrow\alpha=-3$ sau $\alpha=17$.

f) $(2-i)(3+i)=7-i\ \Rightarrow$ Re(z)=7.

SUBIECTUL II

1)

a) $(\hat{3}+\hat{5})\cdot\hat{3}=\hat{1}\cdot\hat{3}=\hat{3}$.

b) $E=3(1+2+3+...+33)=3\cdot\frac{33\cdot34}{2}=1683$.

c) $\log_2 x=3\Leftrightarrow x=8\in(0,\infty)$.

d) Ecuația este echivalentă cu $(x+1)(x^2+1)=0$, rezultă că singura soluție reală este $x=-1$.

e) Doar două elemente ale mulțimii verifică inegalitatea, deci probabilitatea este $\frac{2}{5}$.

2)

a) $f'(x)=1-\sin x$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\sin x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\sin1$.

c) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$.

d) Deoarece $\sin x\le1,\ \forall\ x\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\ f'(x)\ge0,\ \forall\ x\in\mathbf{R}$. În punctele de forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, în care se anulează derivata, funcția are valori diferite, deci *f* este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=-\dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=b=0$ obținem $O_2\in G$, iar pentru $a=1$ şi $b=0$ obținem $I_2\in G$. Dar I_2 este inversabilă , det I_2 =1, inversa fiind tot $I_2\in G$. Deci $I_2\in U(G)$.

b) Fie matricele $A,B\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in \mathbf{Z}$ şi $B=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c,d\in \mathbf{Z}$.

Atunci $A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}\in G$, deoarece are forma matricelor din *G*, iar elementele sunt numere întregi.

c) Avem $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\in G$ deoarece are forma matricelor din *G*, iar elementele sunt numere întregi.

d) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in \mathbf{Z}$ şi $\det(A)=a^2+b^2\neq 0$**.** Dacă $A\in U(G)$ atunci există matricea $A^{-1}\in G$ astfel încât $A\cdot A^{-1}=I_2 \Rightarrow \det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$. Dar $\det(A)$ şi $\det(A^{-1})$ sunt numere întregi strict pozitive $\Rightarrow \det(A)=\det(A^{-1})=1$.

e) Dacă $A\in U(G)$ atunci, conform punctului anterior**,** $\det(A)=a^2+b^2=1\Rightarrow$ $a=\pm 1$ şi $b=0$ sau $a=0$ şi $b=\pm 1$. Obținem astfel patru matrice posibile şi fiecare dintre ele verifică relația $A^4=I_2$.

f) Dacă $A,B,C,D\in U(G)$ diferite două câte două, atunci ele sunt exact matricele obținute la punctul anterior, dar în acest caz $A\cdot B\cdot C\cdot D=-I_2$, contradicție. Deci există două care sunt egale.

g) Fie matricele $A,B\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in \mathbf{Z}$ şi $B=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c,d\in \mathbf{Z}$. Din

$A\cdot B=O_2 \Rightarrow \begin{cases} ac-bd=0 \\ ad+bc=0 \end{cases}$. Prin rezolvarea sistemului în mulțimea numerelor întregi, obținem $a=b=0$ sau $c=d=0$, adică $A=O_2$ sau $B=O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(-x)=2^{-x}+2^{x}=f(x), \forall\, x\in \mathbf{R}$.

b) $f'(x)=(2^{x}-2^{-x})\ln 2$, $x\in \mathbf{R}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem soluția $x=0$.

x	$-\infty$ 0 ∞
$f'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$

Rezultă că $f'(x) \le 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty.0)$, iar $f'(x) \ge 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

d) Deoarece $f''(x) = (2^x + 2^{-x})\ln^2 2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, funcția f este convexă pe **R**.

e) Cum funcția f este continuă pe **R** rezultă că nu există asimptote verticale. Căutăm asimptotele orizontale. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci nu există nici asimptotă orizontală spre ∞ la graficul funcției (la fel spre $-\infty$). Pentru asimptota oblică avem $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, deci nu există nici asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției f (analog spre $-\infty$).

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2^x}{\ln 2} - \dfrac{2^{-x}}{\ln 2}}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{1}{\ln 2} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

g) Se observă că $x = 1$ este soluție. Dacă $x \in (0,1)$, atunci $x > x^2$ și $f(x) > f(x^2)$ (funcția este strict crescătoare pe $[0, \infty)$). La fel $x^{21} > x^{2007}$ și $f(x^{21}) > f(x^{2007})$. Prin însumare avem $f(x) + f(x^{21}) > f(x^2) + f(x^{2007})$, deci pe intervalul $(0,1)$ nu există soluții. Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $x < x^2$ și $f(x) < f(x^2)$. La fel $x^{21} < x^{2007}$ și $f(x^{21}) < f(x^{2007})$. Prin însumare avem $f(x) + f(x^{21}) < f(x^2) + f(x^{2007})$, deci nici pe intervalul $(1, \infty)$ nu există soluții. Rezultă că $x = 1$ este soluție unică.