Varianta 073

SUBIECTUL I

a) 0. b) $AC=\sqrt{5}$. c) $A=\frac{5}{2}$. d) $\sin(C\hat{B}A)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. e) $m=-3$ şi $n=10$. f) $G\left(\frac{10}{3},5\right)$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=5$. b) $a_{400}=2+399\cdot 5=1997$. c) $3P_3$=18. d) $(f\circ f)(1)=1$. e) n=4.

2.

a) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+2007}$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{1004}$.

c) $\int_0^1 f(x)dx=\ln 2008-2+2\sqrt{2007}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2007}}$.

d) $x=0$ este punct de extrem local (punct de minim).

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2007}f(0)}{2007-n^{2007}}=-f(0)=-\ln 2007$.

SUBIECTUL III

a) Alegem $a=b=0\in\mathbf{Z}$ şi obţinem $O_2\in G$. Alegem $a=1\in\mathbf{Z}$. $b=0\in\mathbf{Z}$ şi obţinem $I_2\in G$.

b) Fie $A,B\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} c & d\\ d & c\end{pmatrix}$ cu $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$. Atunci

$AB=\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc\\ ad+bc & ac+bd\end{pmatrix}\in G$ pentru că are forma matricelor din G şi elementele sunt numere întregi.

c) calcul direct.

d) $(x+1)^2-(x-1)^2=x^2+2x+1-x^2+2x-1=4x,\ \forall\ x\in\mathbf{R}$.

e) Din $A\in G_1\Rightarrow \det(A)=\pm 1\neq 0$, deci matricea este inversabilă.

f) Fie $A\in G$ inversabilă şi $A^{-1}\in G$ inversa matricei A. Atunci $\det(A)\in\mathbf{Z}$ şi $\det(A^{-1})\in\mathbf{Z}$. Din egalitatea $A\cdot A^{-1}=I_2$ şi ţinând cont de rezultatul de la punctul c), obţinem $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$. Atunci $\det(A)=\det(A^{-1})=1$ sau $\det(A)=\det(A^{-1})=-1$. Deci $|\det A|=1\Rightarrow A\in G_1$.

g) Folosind rezultatul de la punctul d), putem scrie $4k=(k+1)^2-(k-1)^2$, pentru orice număr natural *k*. Atunci $\forall\, k\in\mathbf{N}$, există numerele întregi $a=k+1,\ b=k-1$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix}\in G$ pentru care $\det(A)=4k$. Rezultă că $G_{4k}\neq\varnothing$ pentru $\forall\, k\in\mathbf{N}$.

SUBIECTUL IV

a) Soluțiile sunt 1,2,3.

b) $g'(x)=-\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-3)^2}\right)<0$, $\forall\, x\in A$.

c) $f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

Atunci $g(x)=\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall\, x\in A$.

d) Din $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall\, x\in A \Rightarrow g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f^2(x)}$, $\forall\, x\in A$.

Dar $g'(x)<0$, $\forall\, x\in A$ (s-a demonstrat la punctul b)), deci $f(x)f''(x)<\left(f'(x)\right)^2$, $\forall\, x\in A$.

e) Se determină că dreptele $x=1,\ x=2$ şi $x=3$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției *g*, deci există 3 asimptote.

f) $\int_4^5\left(g(x+1)-g(x)\right)dx=\int_4^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}\right)dx=\left(\ln x-\ln|x-3|\right)\Big|_4^5=\ln\frac{5}{8}$.

g) Presupunem că $a=0$, atunci ecuația devine $f(x)=0$ şi are soluțiile distincte $x_1=1$, $x_2=2$ şi $x_3=3$. Presupunem că $a\neq 0$, atunci 1, 2, 3 nu sunt soluții, deci soluțiile se caută în A. Din punctul c) avem că $f'(x)=f(x)g(x)$, $\forall\, x\in A$.
Înlocuind în ecuația inițială vom obține $f(x)\left[1-ag(x)\right]=0$. Dar $f(x)\neq 0$ pentru $\forall\, x\in A$, deci $1-ag(x)=0$. Considerăm funcția $h:A\to\mathbf{R}$, $h(x)=1-ag(x)$.
Trebuie să găsim rădăcinile acestei funcții. Avem $h'(x)=-ag'(x)$, $\forall\, x\in A$.
Se disting două subcazuri:

1) Dacă $a>0$, atunci $h'(x)>0$, $\forall\, x\in A$.

x	$-\infty$		1		2		3		∞
$h'(x)$	+ + + + + + + +		|	+ + + + + + +	|	+ + + + + + +	|	+ + + + + + +	
$h(x)$	1 ↗	∞	|	$-\infty$ ↗ ∞	|	$-\infty$ ↗ ∞	|	$-\infty$ ↗	1

Se observă că graficul taie axa *Ox* în trei puncte distincte $x_1\in(1,2)$, $x_2\in(2,3)$ şi $x_3\in(3,\infty)$. Deci ecuația are trei soluții distincte.

2) Dacă $a < 0$, în mod analog se obțin tot trei soluții distincte $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$ şi $x_3 \in (2, 3)$.