Varianta 085

SUBIECTUL I

a) 2. b) Dacă P este mijlocul segmentului BC $P(1,2) \Rightarrow AP: y = 2$.

c) $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 0$. e) $2\sqrt{2}$. f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_6 = 17$. b) $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

c) există $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ polinoame. d) $p = \frac{1}{4}$.

e) Mulțimea B nu este parte stabilă, căci $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in B$, dar $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin B$. Cum produsul a două numere impare este tot un număr impar, mulțimea A este parte stabilă față de înmulțire.

2.

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right) = \frac{2x+1-(2x-1)}{2(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = f(x), \forall x > \frac{1}{2}$.

b) Utilizând a) avem

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), \forall n \in \mathbf{N}^*$$

c) $\frac{1}{2}$. d) $f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2}, x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. e) $\ln\frac{7}{3}$.

SUBIECTUL III

a) Fie $x = [x] + \{x\}$.

Atunci $[x+k] = \left[[x] + k + \{x\}\right] = [x] + k, \forall x \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}$.

b) $A = \left(\frac{2}{3} + 1\right) \wedge \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}; B = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{2}{3} \wedge \frac{5}{2} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.

c) Pentru orice $a, b, c \in \mathbf{R}$, utilizând a) avem: $(a \wedge b) \wedge c = (a + [b]) \wedge c = a + [b] + [c]$

și $a \wedge (b \wedge c) = a \wedge (b + [c]) = a + \left[b + [c]\right] = a + [b] + [c]$, de unde rezultă că legea este asociativă.

d) $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \neq \left(\frac{1}{5} \wedge \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$.

e) Presupunând contrariul, din
$e \wedge a = a, \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow e + [a] = a, \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow e = \{a\}, \forall a \in R$, adică e depinde de a, contradicție.

f) $(c \wedge c) \wedge c = c \Leftrightarrow (c + [c]) \wedge c = c \Leftrightarrow c + 2[c] = c \Leftrightarrow c \in [0,1]$.

g) $H = \{0\}$ este soluție.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, g'(x) = -2\pi \sin 2\pi x, x \in (0, \infty)$.

b) $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

c) Din a) $\Rightarrow f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0,1)$, $f'(1) = 0$, şi $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, \infty)$. Atunci $f(x) \geq f(1) = 1, \forall x \in (0, \infty)$.

d) Deoarece $g(x) \in [-1,1], \forall x \in (0, \infty)$, utilizând c), ecuația devine
$f(x) = 1 = g(x) \Leftrightarrow x = 1$.

e) Aria este $\frac{e^2 - 3}{2}$. f) $2\pi^2$. g) $\lim_{n \to \infty} g(n) = \lim_{n \to \infty} \cos 2\pi n = 1$.