Varianta 087

SUBIECTUL I

a) 5. b) 6. c) aria cerută este $6a^2 = 24$. d) $a = 1, b = 1$. e) $S = \frac{15}{2}$.

f) $8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = (\hat{5})^{-1} \cdot \hat{3} = \hat{5} \cdot \hat{3} = \hat{3}$. b) -2. c) $f(1) = 0 \Leftrightarrow m = -1$. d) $-4x = 6 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

e) $p = \frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3}$. c) $f'(0) = \ln 6$.

d) $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+2}{5n-2} = \frac{7}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$. b) $\det(A) = 0$, $\operatorname{rang}(A) = 1$.

c) Calcul direct.

d) Deoarece $A^2 = A$, avem $A^3 = A^2 \cdot A = A^2 = A$, şi prin inducție matematică, $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă că $A^{2007} = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) Fie $P(n): B^n = I_2 + (2^n - 1)A$.

$B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + (2^k - 1)A)(I_2 + A) = I_2 + (2^{k+1} - 1)A$, deci şi $P(k+1)$ este adevărată.

f) $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} b+c & 0 \\ a+b & a+2b+c \end{pmatrix} \neq C$, deoarece $8 \neq 0$.

g) $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Cum $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, prin inducție matematică se arată că $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 2^n + 1 \end{vmatrix} = 2^n + 1 \neq 0$, deci matricea X este inversabilă.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\cos x, g'(x)=-\frac{1}{x^2}, x\in(0,\infty)$.

b) Integrând prin părți, obținem $I=\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{1}{\pi}$.

d) $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

e) Inegalitatea se scrie echivalent $\left(t\sin x-\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$, relație adevărată $\forall t\in\mathbf{R}, x>0$.

f) Din e) avem că $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(t^2\sin^2 x-2t\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx\geq 0$ şi cu proprietatea de liniaritate a integralei definite obținem inegalitatea dorită.

g) Trinomul de gradul doi de la f) fiind pozitiv pentru orice $t\in\mathbf{R}$, avem $\Delta\leq 0$, de unde obținem inegalitatea dorită.