Varianta 089

SUBIECTUL I

a) $\cos\left(B\hat{A}C\right)=\frac{1}{2}$ .b) 50. c) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$. d) $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ .e)$10\sqrt{3}$ .f) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

SUBIECTUL II

1.

a) Restul este $r=f(-2)=-11$. b) 0. c)1. d) Rangul cerut este 1. e) $f_{\min}=-1$.

2.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty.$

b) $y=0$. c) $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

d) $f'(2)=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. e) $5-\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL III

a) $f_a, f_b\in G\Rightarrow f_a\circ f_b:\mathbf{R}\to\mathbf{R},(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_b(x)+a=x+b+a=$
$=f_{a+b}(x),\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow f_a\circ f_b=f_{a+b.}$.

b) Din a) rezultă că $f_a\circ f_0=f_a=f_0\circ f_a,\forall f_a\in G.$

c) Rezultă imediat folosind a).

d) Partea stabilă se obține din a), elementul neutru este $f_0\in G$ şi rezultă din b). Din c) rezultă că orice element $f_a\in G$ este simetrizabil şi simetricul său este $f_{-a}\in G$. Deoarece compunerea funcțiilor este asociativă, iar din a) se obține comutativitatea, va rezulta că $(G,\circ)$ este grup abelian.

e) Utilizând a) avem $f_{3a}=f_{15}\Rightarrow a=5$.

f) Utilizând a) avem $g(f_a\circ f_b)=g(f_{a+b})=a+b=g(f_a)+g(f_b),\forall f_a, f_b\in G$.

g) Pentru $n=1$ afirmația este evident adevărată. Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n=k\in\mathbf{N}^*$. Atunci

$g\left(\underbrace{f_a\circ f_a\circ\ldots\circ f_a}_{k+1\,ori}\right)=g(f_a)+g\left(\underbrace{f_a\circ f_a\circ\ldots\circ f_a}_{k\,ori}\right)=a+ka=(k+1)a$, adică afirmația este adevărată şi pentru $n=k+1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=-\sin x+x,\forall x\in\mathbf{R}.$

b) $f''(x)=1-\cos x,\forall x\in\mathbf{R}.$

c) Din b) rezultă că $f'''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi se anulează doar în $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, deci f' este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Cum $f'(0) = 0$ vom avea că $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

d) Deoarece $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Din c) avem că $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) $\frac{1}{24}$. f) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

g) Din d) rezultă $\cos(x^2) \geq 1 - \frac{x^4}{2}, x \in \mathbf{R}$, deci

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(x - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{10}.$$