Varianta 009

SUBIECTUL I

a) 4.
b) $\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{2}$.
d) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$. Deci vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.
e) 2.
f) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.
a) $(n+2)(n+3)$.
b) 196.
c) $x=1$.
d) $x=1$.
e) $\frac{3}{25}$.

2.
a) $2x+\cos x$.
b) $\frac{4}{3}-\cos 1$.
c) 0.
d) $f''(x)>0, \forall x\in\mathbf{R}$. Rezultă că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.
e) 0.

SUBIECTUL III

a) $O_2=0\cdot A+0\cdot I_2; (a=b=0)$.
$I_2=0\cdot A+1\cdot I_2; (a=0, b=1)$.

b) $A^2-A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$.

c) $\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Deci rangul lui A este 2.

d) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

e) $A^{2007}=(A^3)^{669}=(-I_2)^{669}=-I_2$.

f)Fie $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Q})$.Din $AB=BA$ avem

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.Rezultă $\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ -x-z & -y-t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y & 3x-y \\ 2z-t & 3z-t \end{pmatrix}$

Sau $\begin{cases} 3z=-y \\ y+t=x \\ -x-3z=-t \end{cases}$, adică $y=-3z$ şi $x=-3z+t$.

Deci $B=\begin{pmatrix} t-3z & -3z \\ z & t \end{pmatrix}$.

Luăm $z=-a$ şi $t=-a+b$;obținem $B=aA+bI_2$.

g)Dacă $Y=aA+bI_2$, $a,b\in\mathbf{Q}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 2a+b & 3a \\ -a & -a+b \end{pmatrix}$ şi

$\det Y=a^2+ab+b^2$.

Dacă $\det Y=0\Rightarrow$ $a=b=0$,adică $Y=O_2$, contradictie cu $Y\neq O_2$.

Deci $\det Y\neq 0\Rightarrow$ matricea Y este inversabilă.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-\dfrac{4}{5}$.

c) $f'(x)=\dfrac{-4(x+1)}{(x^2+1)\left[(x+2)^2+1\right]}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Atunci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[-1,\infty)$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

e)Din **c) ,** cum $x_0=-1$ este punct de maxim local **,**rezultă $0<f(x)\leq f(-1)=\dfrac{\pi}{2},\forall x\in\mathbf{R}$.

f) $\int_0^x \operatorname{arctg}(t+a)dt=t\cdot arctg(t+a)\Big|_0^x-\dfrac{1}{2}\int_0^x\dfrac{2t}{(t+a)^2+1}dt=$

$=xarctg(x+a)-\dfrac{1}{2}\ln\left((t+a)^2+1\right)\Big|_0^x+a\cdot arctg(t+a)\Big|_0^x=$

$$=(x+a)\cdot \operatorname{arctg}(x+a)-\frac{1}{2}\ln\left((x+a)^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)-a\cdot \operatorname{arctg} a\ .$$

g) Aria $=\int_0^1 \operatorname{arctg}(x+2)dx-\int_0^1 \operatorname{arctg}x\,dx=3arctg3-2arctg2-\frac{\pi}{4}$.