# Varianta 098

SUBIECTUL I

a) $-5+12i$ .b) $AC=5\sqrt{2}$ .c) $S=12$. d) $\sin\left(A\hat{B}C\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. e) $m=\frac{1}{7}, n=-\frac{6}{7}$.

f) $d\left(B,AC\right)=\frac{\left|7\cdot 4+2-6\right|}{\sqrt{7^2+1}}=\frac{12\sqrt{2}}{5}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x\circ e=x, \forall x\in \mathbf{R} \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(e-3\right)=0, \forall x\in \mathbf{R} \Leftrightarrow e=3$. Se verifică prin calcul că $3\circ x=x, \forall x\in \mathbf{R}$. b) $3\circ x=11 \Leftrightarrow x=11$. c) $-22$ .d)1. e) $x=-1$

2.

a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x\in \mathbf{R}$. b) $f'(-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. c) $\sqrt{2}-1$ .d) $y=x$ .e) $\frac{1}{2007}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=1$ şi $b=0$ avem $1=1+\varepsilon\cdot 0\in G$. Pentru $a=b=1$ rezultă $w=1+1\cdot\varepsilon\in G$.

b) $\varepsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\varepsilon-1, \varepsilon^3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=1.$

c) Fie $z_1=a+\varepsilon\cdot b\in G, z_2=c+\varepsilon\cdot d\in G.$ Atunci $z_1+z_2=a+c+\varepsilon\cdot\left(b+d\right)\in G$, căci $a+c, b+d\in \mathbf{Z}$ şi $z_1\cdot z_2=ac+\varepsilon\left(ad+bc\right)+\varepsilon^2 bd=ac-bd+\varepsilon\left(ad+bc-bd\right)\in G$, căci $ac-bd, ad+bc-bd\in G$.

d) $w=1+\varepsilon, w=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi luând $w'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-\varepsilon\in G, w\cdot w'=1$, deci $w\in H$.

e) Deoarece $w^3=-1$, rezultă $w^{2007}=\left(w^3\right)^{669}=\left(-1\right)^{669}=-1$.

f) Fie $z=a+\varepsilon b\in H, z'=c+\varepsilon d\in H$ cu $z\cdot z'=1$. Atunci avem

$$ac-bd+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(ad+bc-bd\right)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc-bd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ca-db=1 \\ cb+d\left(a-b\right)=0 \end{cases}.$$

Acesta îl privim ca şi un sistem liniar cu necunoscutele *c* şi *d*. Matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ are determinantul $\det\left(A\right)=a^2-ab+b^2\neq 0$, căci $z\neq 0$. Atunci

$c=\frac{1}{\det\left(A\right)}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a-b \end{vmatrix}=\frac{a-b}{\det\left(A\right)}, d=\frac{1}{\det\left(A\right)}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}=\frac{-b}{\det\left(A\right)}.$ Dacă $b\in \mathbf{Z}\setminus\left\{-1,1\right\}$, atunci $d=\frac{-b}{a^2-ab+b^2}\in\left(-1,1\right)$ şi $d\in \mathbf{Z}$ implică $b=0$, deci $c=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}\in \mathbf{Z}$ şi

$a=\pm 1$. Atunci $z\in\{-1,1\}$. Dacă $b=1$, atunci

$d=\dfrac{-1}{a^2-a+1}\in\mathbf{Z}\Rightarrow a^2-a+1\in\{-1,1\}\Rightarrow a\in\{0,1\}$, deci $z\in\{\varepsilon,1+\varepsilon\}$. Dacă $b=-1$, atunci $d=\dfrac{1}{a^2+a+1}\in\mathbf{Z}\Rightarrow a^2+a+1\in\{-1,1\}\Rightarrow a\in\{0,-1\}$, deci $z\in\{-\varepsilon,-1-\varepsilon\}$.

Utilizând și b) deducem că $H=\{-1,1,\varepsilon,-\varepsilon^2,-\varepsilon,\varepsilon^2\}$. Cum $|-1|=|1|=|\varepsilon|=|-\varepsilon|=|\varepsilon^2|=|-\varepsilon^2|=1$, avem că $\forall z\in H\Rightarrow |z|=1$.

g) Din demonstrația de la f) avem că $H=\{-1,1,\varepsilon,-\varepsilon,\varepsilon^2,-\varepsilon^2\}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x},\ x\in[0,\infty)$.

b) Din a) rezultă că $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$ și $f'(0)=0$, deci funcția $f$ este descrescătoare pe $[0,\infty)$. c) Utilizând b) avem $f(x)\le f(0)=0,\forall x\in[0,\infty)$.

d) 0. e)

$$F(x)=\int_0^x(\ln(1+t)-t)\,dt=t\cdot\ln(1+t)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t}dt-\frac{t^2}{2}\Big|_0^x$$

$$=x\ln(1+x)-(t-\ln(t+1))\Big|_0^x-\frac{x^2}{2}=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}.$$

f) Cum $F$ este o primitivă a funcției $f$, avem $F'(x)=f(x)\le 0,\forall x\in[0,\infty)$, deci $F$ este descrescătoare pe $[0,\infty)$.

g) Din c) avem că $\ln(1+x)\le x,\forall x\ge 0$, deci $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le 1,n\in\mathbf{N}^*$, de unde

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le e<3,\forall n\in\mathbf{N}^*$.