EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**019**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x + ay + 3 = 0$ sunt paralele.

(4p) **b)** Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

(4p) **c)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = i + i^2 + i^3 + ... + i^{11}$.

(4p) **d)** Să se calculeze raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

(2p) **e)** Să se calculeze suma $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se rezolve ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și se notează cu a, b rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

(3p) **a)** Să se determine valoarea minimă a funcției f .

(3p) **b)** Să se calculeze suma $\frac{1}{2a - a^2} + \frac{1}{2b - b^2}$.

(3p) **c)** Să se determine numerele reale y pentru care $f(3^y) = 6$.

(3p) **d)** Să se calculeze produsul rădăcinilor ecuației $f(\log_2 t) = 11$.

(3p) **e)** Să se arate că determinatul $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix}$ este număr natural.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se rezolve în $\mathbf{R}^*$ inecuația $f(x) \le \frac{1}{2x}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot f(n)\right)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar pentru o matrice oarecare $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ se notează $a + d = tr(A)$.

(4p) **a)** Să se arate că pentru orice două matrice $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ este adevărată egalitatea $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ este adevărată egalitatea $A^2 - tr(A)\cdot A + (\det A)\cdot I_2 = O_2$.

(4p) **c)** Să se găsească o matrice $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(X) = 0$ și $tr(X) = 5$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $Y \in M_2(\mathbf{R})$, $\det(Y) = 0$ și $tr(Y) = 5$, atunci pentru orice n natural, $n \geq 2$, are loc egalitatea $Y^n = 5^{n-1}\cdot Y$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B), \quad \forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **f)** Să se găsească două matrice $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$, $X \neq Y, X, Y \neq O_2$ care verifică $X^2 = Y^2 = O_2$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$ și $X^2 = Y^2 = O_2$, atunci $tr(X+Y) = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \cos x + \ln(\cos x) + x^2$

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

(4p) **b)** Să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \ \forall a, b \in (0, \infty)$.

(2p) **c)** Să se arate că $\cos x \geq \cos^2 x, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **f)** Să se arate că $f(x) + g'(x) = 0, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **g)** Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **h)** Să se arate că $\int_0^1 (\cos x + \ln(\cos x))dx \leq \frac{2}{3}$.