EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….039**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2,-1)$ și $B(5,3)$.

(4p) **b)** Să se determine $a>0$ dacă punctul $M(a,0)$ aparține elipsei $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

(4p) **d)** Să se determine aria cercului înscris în pătratul de latură 2.

(2p) **e)** Să se calculeze distanța de la punctual $C(1,1)$ la dreapta de ecuație $x+y=1$.

(2p) **f)** Să se determine $a\in\mathbf{C}$ dacă $z=1+i$ este soluție a ecuației $z^2-2z+a=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine $n\in\mathbf{N}$ astfel încât $C_n^2=10$.

(3p) **b)** Să se determine al zecelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu $a_1=1$, $a_2=3$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca o soluție a ecuației $z^4=1$ să fie reală.

(3p) **d)** Se notează cu g inversa funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+3$. Să se calculeze $g(5)$.

(3p) **e)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f=X^4-2X^2+5$ la polinomul $g=X-\sqrt{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\cdot\ln x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(3p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

(2p) **a)** Să se arate că, dacă $x, y \in (-1,1)$, atunci $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se consideră legea de compoziție "$\circ$" definită prin

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}, \quad \forall x, y \in G.$$

(4p) **b)** Să se verifice egalitatea $x \circ y = \dfrac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)+(1-x)(1-y)}, \quad \forall\, x, y \in G$.

(2p) **c)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \ \forall\, x, y, z \in G$.

(4p) **d)** Să se determine $e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \ \forall\, x \in G$.

(4p) **e)** Să se arate că $\forall\, x \in G$, există $y \in G$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = 0$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall\, x_1, x_2, ..., x_n \in G$,

$$x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n = \frac{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)-(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)+(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)}.$$

(2p) **g)** Să se arate că $\dfrac{1}{2} \circ \dfrac{1}{3} \circ ... \circ \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-2}{n^2+n+2}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \ n \geq 2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x), \ x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(2p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + ... + f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln a$,

$\forall x \in \mathbf{R}, \forall a > 0$.

(2p) **g)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.