EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….064**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine partea reală a numărului complex $z = i^{2006} + i^{2007}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,-2), B(2,0), C(0,4)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos^2(75^0) + \cos^2(15^0)$.

(4p) **d)** Să se determine în câte puncte intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ cercul cu centrul în $O(0,0)$ și de rază 1.

(2p) **e)** Să se determine câte puncte cu ambele coordonate întregi aparțin cercului cu centrul în $O(0,0)$ și de rază 2.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de ecuație a unei drepte paralele cu dreapta $3x - y - 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt[3]{3}$.

(3p) **b)** Să se calculeze câte numere naturale de două cifre scrise în baza 10 nu conțin cifrele 2 și 3 .

(3p) **c)** Să se determine câte numere întregi c verifică inegalitățile $2 < \log_2 c < 3$.

(3p) **d)** Să se determine numerele întregi d care verifică egalitatea $\left[\frac{2d}{3}\right] = 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de polinom de gradul al treilea cu coeficienți întregi pentru care produsul rădăcinilor sale este 2.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 3}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$. .

(3p) **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

(3p) **c)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(2)$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și submulțimea

$G=\{X\in M_2(\mathbf{R}) | A\cdot X = X\cdot A\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze A^2 și A^3.

(4p) **b)** Să se arate că $\det(A^n)\neq 0$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se determine rangul matricei *A*.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $X\in G$, există $a,b\in \mathbf{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ nba^{n-1} & a^n\end{pmatrix}$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$, unde $a,b\in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X\in M_2(\mathbf{R})$ și $X^n = A,\ n\in \mathbf{N}^*$, atunci $X\in G$.

(2p) **g)** Să se rezolve ecuația $X^{2007}=A$ în $M_2(\mathbf{R})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to \mathbf{R}$ definite prin $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(1)$ și $g'(1)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x)\geq g'(x),\ \forall x\in(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)\geq g(x),\ x\in[1,\infty)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(2p) **f)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 g(x)dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $4\cdot e^3 < 81$.