EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….085**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2), B(2,0), C(0,4)$.

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul C la dreapta AB.

(4p) **b)** Să se determine ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\left(A\hat{O}B\right)$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\cos 2x$, dacă $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2p) **e)** Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$, folosind eventual egalitatea $\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t$, adevărată pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine a_6 dacă în progresia aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 5$ şi $a_5 = 14$.

(3p) **b)** Să se determine toate numerele întregi m care verifică relația $|2m-1| \leq 4$.

(3p) **c)** Să se determine câte polinoame de gradul al doilea au toți coeficienții în mulțimea $\{0,3,6,9\}$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element x al mulțimii $\{0,3,6,9\}$ să fie soluție a ecuației $\sqrt{x-2} = 4-x$.

(3p) **e)** Să se determine care dintre mulțimile următoare sunt părți stabile ale mulțimii $\mathbf{R}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale: $A = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ sau $B = [0,2]$.

2. Se consideră funcția $f : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$.

(3p) **a)** Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)$, $\forall x > \frac{1}{2}$.

(3p) **b)** Să se arate că $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(1) + f(2) + \ldots + f(n)\right]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^{\sqrt{2}} 8x\cdot f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se ştie că pentru orice număr real x are loc egalitatea $x=[x]+\{x\}$ (adică suma dintre partea sa întreagă şi partea sa fracționară). Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziție "$\wedge$" prin $a\wedge b=a+[b]$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $[x+k]=[x]+k$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall k\in\mathbf{Z}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $A=\left(\frac{2}{3}\wedge\frac{3}{2}\right)\wedge\frac{4}{3}$ şi $B=\frac{2}{3}\wedge\left(\frac{3}{2}\wedge\frac{4}{3}\right)$.

(4p) **c)** Să se arate că legea "$\wedge$" este asociativă.

(2p) **d)** Să se arate că legea "$\wedge$" nu este comutativă.

(2p) **e)** Să se arate că nu există $e\in\mathbf{R}$ astfel încât $a\wedge e=e\wedge a=a$, $\forall a\in\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se determine numerele $c\in\mathbf{R}$ pentru care $(c\wedge c)\wedge c=c$.

(2p) **g)** Să se determine mulțimile finite $H\subset\mathbf{Z}$ pe care "$\wedge$" este lege de compoziție.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\ln x$, $g(x)=\cos 2\pi x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se rezolve ecuația $f(x)=g(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-g(x)}{x^2}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}g(n)$.