EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta …094

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4-3i}{4+3i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3,12)$ și $C(4,13)$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $(2-i)(3-i)$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,12)$ și $C(4,13)$ să aparțină dreptei de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,12)$, $B(2,2)$ și $C(4,13)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $\frac{15+6i}{6-15i}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_8$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_8^3-C_8^5+C_8^8$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x=-1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $64^x-32=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n<19$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+5x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n+3}{5\ln n-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Pentru orice $x\in\mathbf{C}$, definim matricea $B(x)=A+xI_3$ și funcția polinomială $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(x)=\det B(x)$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x)=x^3+4x^2-5x$, $\forall x\in\mathbf{C}$.

(4p) **c)** Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuația $f(x)=0$.

(2p) **d)** Să se arate că matricea $B(2)$ este inversabilă.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice nenulă $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AU=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se găsească o matrice nenulă $C\in M_{3,3}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AC=O_3$.

(2p) **g)** Să se arate că **nu există** o matrice $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AV=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru oricare $p\in\mathbf{N}$ și $q\in\mathbf{N}$ definim: $B(p,q)=\int_0^1 x^q(1-x)^p\,dx$, $\forall p,q\in\mathbf{N}^*$,

$B(0,q)=\int_0^1 x^q\,dx$, $\forall q\in\mathbf{N}^*$, $B(p,0)=\int_0^1 (1-x)^p\,dx$, $\forall p\in\mathbf{N}^*$ și $B(0,0)=\int_0^1 1\,dx$.

(4p) **a)** Să se calculeze $B(1,1)$.

(4p) **b)** Să se arate că $B(0,n)=\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $B(n,0)$, $n\in\mathbf{N}$.

(2p) **d)** Efectuând schimbarea de variabilă $x=1-t$, să se arate că

$B(p,q)=B(q,p)$, $\forall p,q\in\mathbf{N}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că

$B(p,q)=\dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$, $\forall p\in\mathbf{N}^*$, $\forall q\in\mathbf{N}$.

(2p) **f)** Să se arate că $B(n,q)=\dfrac{n!q!}{(q+n)!}B(0,n+q)$, $\forall n,q\in\mathbf{N}$.

(2p) **g)** Să se arate că $B(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$, $\forall p,q\in\mathbf{N}$.